E.S.M.E.

Concours d'entrée en Mathématiques Spéciales
Epreuve d'Algèbre et Analyse
Mardi 18 Mai 1991 - Durée: 4 heures

Soit E un espace vectoriel réel. Si f et g sont deux endomorphismes de E, on note Im f l'espace image de f, Ker f le noyau de f, $fg=fog$, $f^2=fof$, $f^n=fof^{n-1}$ et $e=Id_E$ (identité). Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2=ku$.

---

1 Soit $u \in A_k$. a) u peut-il être inversible? Qu'est-ce que u dans ce cas?

b) Déterminer $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} \in$ Im u.
c) Montrer que, si $k \neq 0$, Im u et Ker u sont des sous-espaces supplémentaires. Que dire de Im u et Ker u si k=0?
d) On suppose que E est de dimension finie. Lorsque $k \neq 0$, comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale? Quelle sera alors cette matrice? Si k=0, peut-on trouver une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale?

2 Soient u et v deux endomorphsimes de E appartenant à A_k. On suppose dans les questions a), b), c) de cette partie que $k \neq 0$.
a) Montrer que uv+vu=0 implique uv=vu=0.
b) A quelle condition nécessaire et suffisante u+v appartient-il à A_k? Montrer que dans ce cas, Im(u+v)=Im u+Im v et que Ker(u+v)=Ker u∩Ker v.
c) Montrer que si uv=vu, uv appartient à un ensemble $A_{k'}$, et que dans ce cas Im uv=Im u∩Im v et Ker uv=Ker u+Ker v.

d) On suppose enfin que u et v appartiennent à A_0 avec $u \neq 0$ et que dim E=2. Soit $\vec{e_1}$ un vecteur de E tel que $u(\vec{e_1})=\vec{e_2} \neq \vec{0}$. Montrer que $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ forment une base de E, déterminer la matrice associée à u dans cette base. En déduire que dans ce cas, uv+vu=0 implique encore uv=vu=0.

3 Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation $f^2-af+be=0$ où a et b sont des réels donnés. On suppose f et e linéairement indépendants.
a) A quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes, λ_1 et λ_2, telles que les endomorphismes $u=f-\lambda_1 e$ et $v=f-\lambda_2 e$ appartiennent respectivement à A_k et $A_{k'}$? Préciser alors k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.
b) Montrer que dans ce cas, on a uv=vu=0. Expliquer ce résultat en considérant l'endomorphisme u-v.
c) Calculer, pour p entier positif, l'endomorphisme f^p en fonction de u et v.
d) A quelle condition nécessaire et suffisante f est-il inversible? Quel est alors son inverse?

A SUIVRE

4 Soit g un endomorphisme de E, g de rang 1.

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $g \in A_k$. On montrera que si Im g n'est pas inclus dans Ker g, Im g et Ker g sont supplémentaires.
b) On suppose E de dimension finie. Soit M la matrice associée à g dans une base de E. Montrer que k=trace de M (c'est à dire la somme des coefficients diagonaux de M).

5 On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1] et à valeurs réelles. Soit F une fonction donnée non nulle appartenant à E, et u l'application qui à toute fonction G appartenant à E fait correspondre la fonction H définie par

$H(x)=\int_0^1 F(x).t.G(t).dt$ pour tout x de [0,1].

a) Montrer que u est un endomorphisme de E.
b) Montrer que u est de rang 1. Quel est l'espace image de u?
c) Montrer qu'il existe un réel k tel que $u^2=ku$, et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.
d) Calculer k lorsque F(x)=arcsin x.
e) Calculer k lorsque $F(x)=e^{\sqrt{x}}$.

6 Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et admettant des dérivées à tous ordres sur l'intervalle $]0,\infty[$, et u l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$, fait correspondre la fonction g définie par g(x)=x f'(x).
a) Monter que u est un endomorphisme de E.
b) On se donne le réel k. Montrer qu'il existe un sous-espace E de $\mathcal{C}$ tel que la restriction de u à E, qu'on notera v, soit un endomorphisme de E satisfaisant à la relation $v^2=kv$. Donner la dimension et une base $\mathcal{B}$ de E en distinguant le cas où k=0 et le cas où k≠0.
c) Déterminer dans chacun de ces deux cas la matrice associée à v dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de v?

FIN